Lời giải hai bài toán hình học trong kì thi chọn HSG Quốc gia năm 2014

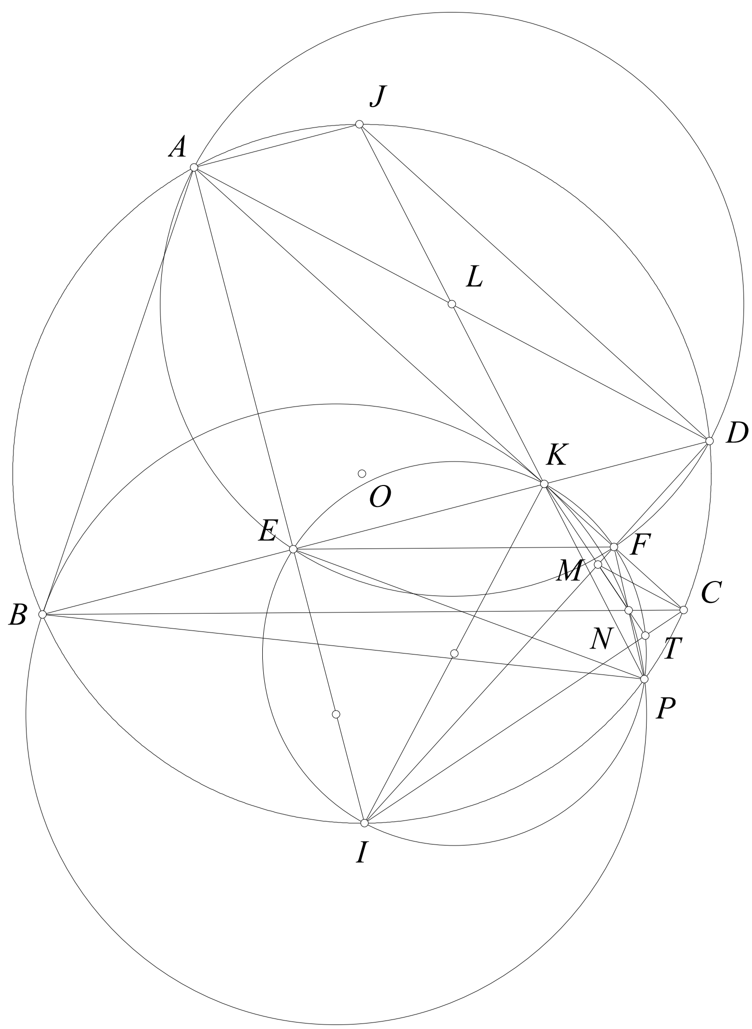
Nguyễn Văn Linh

Tháng 1 năm 2014

Bài 1 (Bài 4 VMO)**.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D khác B và cắt đường thẳng AI tại E. Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại F.

a) Chứng minh rằng $EF = \dfrac{BC}{2}$.

b) Trên DI lấy điểm M sao cho CMsong song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P khác B. Chứng minh rằng đường thẳng PK đi qua trung điểm của đoạn thẳng AD.



Chứng minh. a) Do I là điểm chính giữa cung BC nên $IB = IC = IK$. Từ đó thu được $AB = AK$ và $DK = DC$. Điều này nghĩa là AI và DI lần lượt là đường trung trực của BK và CK, suy ra E, F lần lượt là trung điểm của BK và CK.

Như vậy EF là đường trung bình của tam giác BKC nên $EF = \frac{BC}{2}$.

b) Ta có $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$ nên K là trực tâm tam giác AID. Từ đó $IK \perp AD$.

Theo giả thiết $CM \parallel AD$ nên $CM \perp IK$. Suy ra M là trực tâm tam giác IKC.

Gọi T là giao điểm của KM và IC suy ra $KT \perp IC$.

Ta có $\angle TIP = \angle CIP = \angle CBP = \angle NBP = \angle NKP = \angle TKP$. Do đó tứ giác $IKTP$ nội tiếp. Suy ra $\angle KPI = 90^\circ$.

Gọi J là giao của PK với (ABC). Ta có $\angle JAI = \angle JDI = 90^\circ$. Do đó $AJ \parallel KD$ và $DJ \parallel AK$.

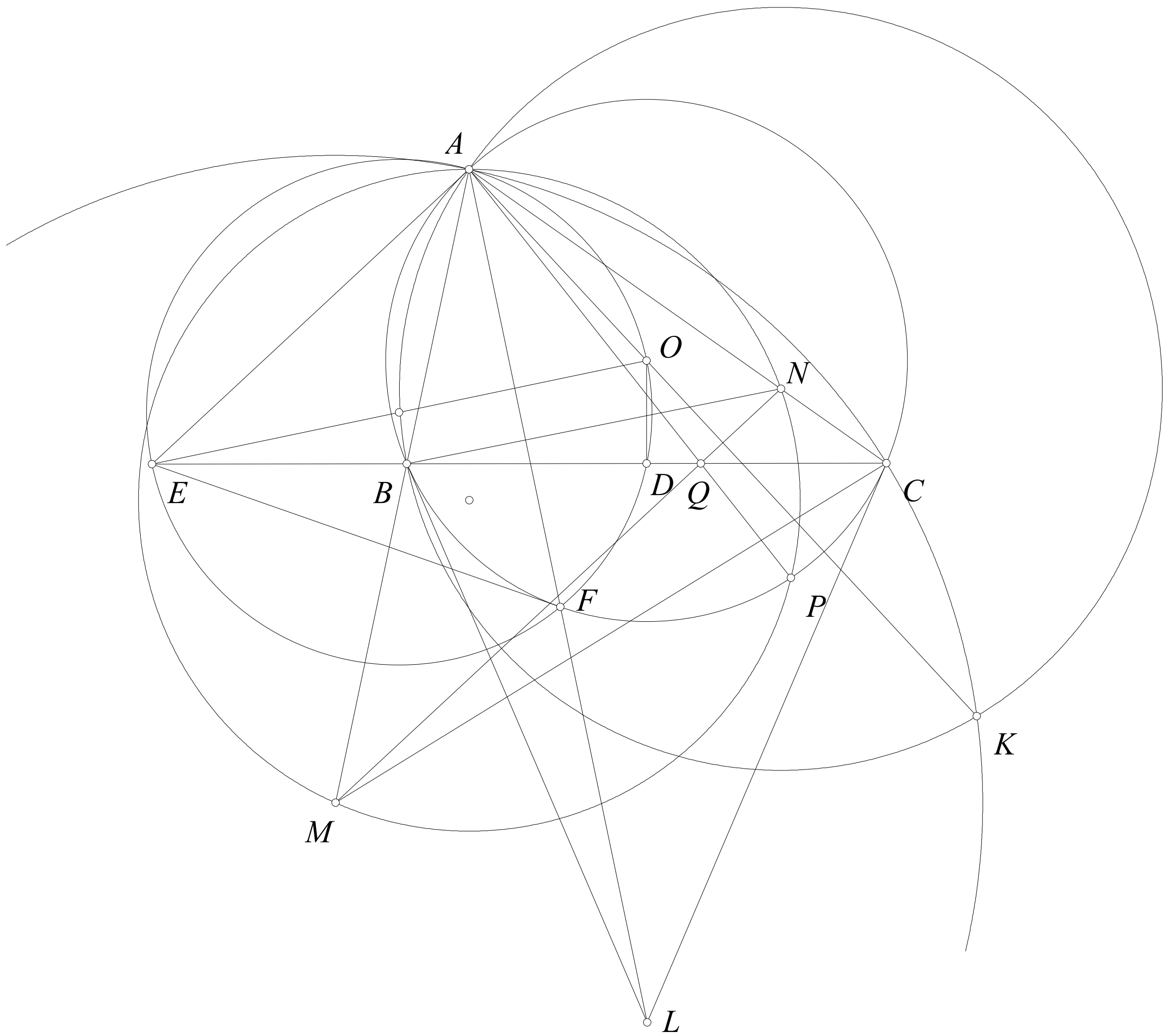
Suy ra $AJDK$ là hình bình hành, nghĩa là JK cắt AD tại trung điểm của AD. Ta có đpcm.

Nhận xét. Sau khi chứng minh $\angle IPK = 90^\circ$ ta cũng có thể giải quyết bài toán theo hướng khác với chú ý rằng P là điểm Miquel của tứ giác nội tiếp $ADFE$. Từ đó P nằm trên đường thẳng nối giao điểm của hai cạnh đối của tứ giác $ADFE$. Áp dụng định lý Brocard ta thu được PK đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADFE$. $\square$

Bài 2 (Bài 5 VMO)**.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó BC cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Các đường tròn ngoại tiếp AMN, ABC cắt nhau tại P khác A. Đường thẳng MN cắt BC tại Q.

a) Chứng minh A, P, Q thẳng hàng.

b) Gọi D là trung điểm BC. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh AF đi qua một điểm cố định.



Chứng minh. a) Do $MA = MC$ và $NA = NB$ nên các tam giác AMC và ANB cân. Suy ra $\angle ABN = \angle BAC = \angle ACM$. Từ đó tứ giác $BNCM$ nội tiếp.

Suy ra $\overline{QB}.\overline{QC} = \overline{QM}.\overline{QN}$ hay Q nằm trên trục đẳng phương của (O) và (AMN), tức là Q nằm trên AP.

b) Do ON và OM lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng AB và AC nên $ON \perp AM, OM \perp AN$. Suy ra O là trực tâm của tam giác AMN hay $AO \perp MN$.

Mặt khác (M, MA) cắt (N, NA) tại A và K nên $AK \perp MN$. Suy ra A, O, K thẳng hàng.

Ta có $\angle OAE = \angle ODE = 90^\circ$ nên A, D nằm trên đường tròn đường kính OE. Suy ra EA, EFlà hai tiếp tuyến của (O).

Ta thu được $ABFC$ là tứ giác điều hòa. Điều này nghĩa là AF luôn đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến của (O) tại B, C và là điểm cố định. ☐

Nhận xét. Bài toán chỉ là sự kết hợp của hai bài toán cơ bản cùng với tính chất của tứ giác điều hòa.